

## CHAPITRE 7

### ANALYSE DES STRATIFIÉS

#### 7.1 Introduction

L'empilement de plusieurs plis de différentes orientations qui sont collés ensemble forme un *stratifié*.

##### Définition du code de description

Chaque pli est noté par l'angle (en degré) entre la direction longitudinale des fibres et l'axe x.

Des plis adjacents sont séparés par une barre oblique (/) si leurs angles ont de différentes valeurs absolues.

La séquence d'empilement commence à partir du premier pli supérieur et se termine au dernier pli.

Un indice est utilisé afin d'indiquer le nombre de plis adjacents possédant la même orientation.

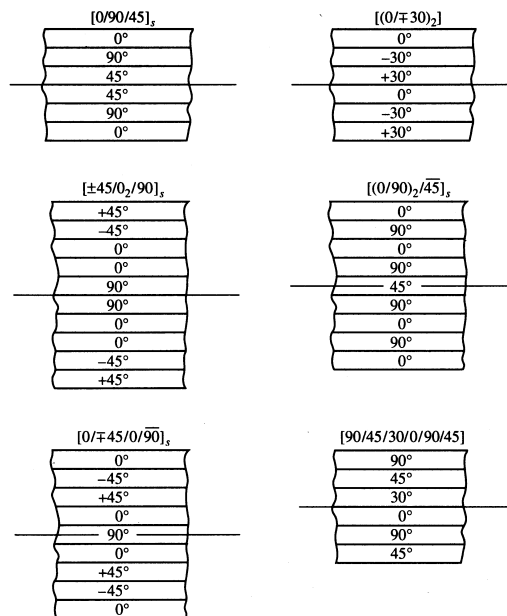
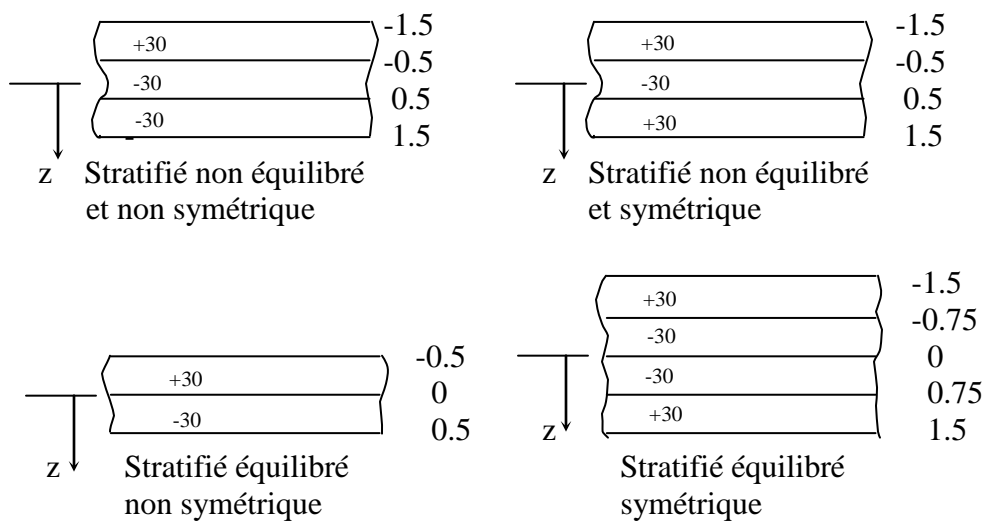


Figure 7.1 Quelques exemples d'empilement

### Définitions

<u>Stratifié symétrique</u>	:	Les plis sont disposés symétriquement par rapport au plan moyen géométrique (plan (x,y) passant par le milieu de l'épaisseur du stratifié).
<u>Stratifié équilibré</u>	:	Nombre de plis à $+\theta$ est égal au nombre de plis à $-\theta$
<u>Stratifié orthogonal</u>	:	Plis de $0^\circ$ et de $90^\circ$



**Figure 7.2** Différents types de stratifié

### Notes :

- Un pli dont les axes naturels ne coïncident pas avec les axes de référence se comporte comme un stratifié non équilibré mais symétrique.
- Pour qu'un stratifié soit symétrique et équilibré, il doit comprendre au moins quatre plis.
- Un stratifié symétrique et équilibré doit comprendre un nombre pair de plis.

## 7.2 Théorie (classique) des plaques stratifiées (avec couplage)

Plusieurs plis à orientation quelconque.  
Empilage des plis symétrique ou non.

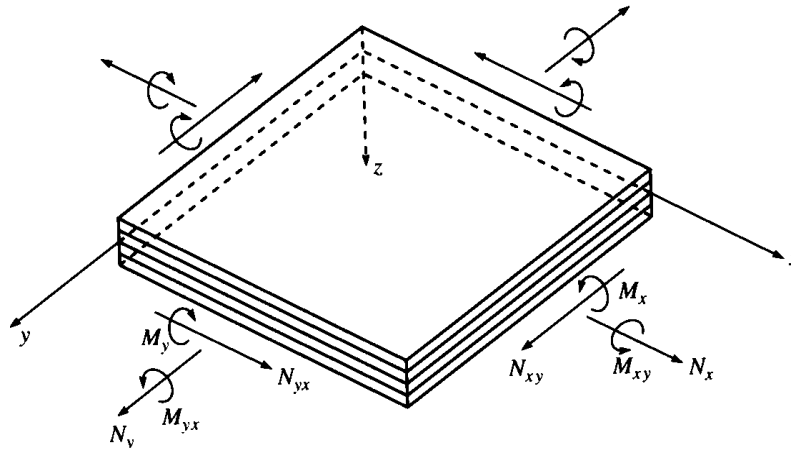


Figure 7.3 Système de coordonnées et les éléments de réduction [Gibson]

$(x, y)$  est le *plan moyen géométrique (PMG)*  
 $u, v$  et  $w$  sont les déplacements suivant les directions  $x, y$  et  $z$ .

### Hypothèses de base : (État plan de contraintes et petites déformations)

Élément est constitué par un nombre arbitraire de plis parfaitement liés les uns aux autres et dont les axes naturels ne coïncident pas obligatoirement avec les axes de références.

L'épaisseur  $t$  de l'élément est très faible par rapport aux deux autres dimensions (longueur et largeur).

Les déplacements  $u, v, w$  sont faibles par rapport à l'épaisseur  $t$  de l'élément.

Les déformations  $\epsilon_x, \epsilon_y$  et  $\gamma_{xy}$  sont faibles.

Les déformations de cisaillement  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$  sont négligeables.

Les déplacements  $u$  et  $v$  sont des fonctions linéaires de  $z$ .

La déformation normale  $\epsilon_z$  est négligeable.

Les relations  $\sigma - \epsilon$  dans chacun des plis sont conformes à la loi de Hooke.

L'épaisseur  $t$  de l'élément est constante.

$\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  sont nulles à la surface de l'élément ( $z = \pm \frac{t}{2}$ ).

## Éléments de réduction

### Contraintes résultantes

Considérons un stratifié constitué de 3 plis d'une épaisseur de 1 mm chacun :

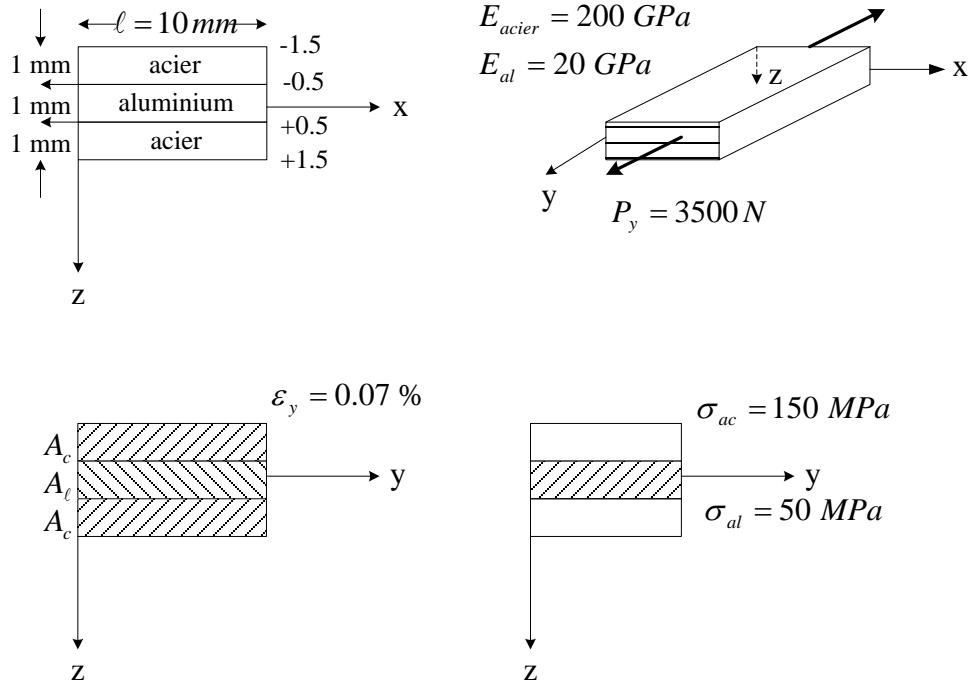


Figure 7.4 Éléments de réduction

Équilibre :  $2F_{ac} + F_{al} = P_y$

$$2(\sigma_{ac} \times A_{ac}) + (\sigma_{al} \times A_{al}) = P_y \quad (1)$$

Compatibilité :  $\epsilon_{ac} = \epsilon_{al} \quad (2)$

Rel.  $\sigma - \epsilon$  :

$$\begin{cases} \epsilon_{ac} = \frac{\sigma_{ac}}{E_{ac}} \\ \epsilon_{al} = \frac{\sigma_{al}}{E_{al}} \end{cases} \quad (3)$$

(3) dans (2)  $\Rightarrow \frac{\sigma_{ac}}{E_{ac}} = \frac{\sigma_{al}}{E_{al}} \Rightarrow \sigma_{al} = \sigma_{ac} \frac{E_{al}}{E_{ac}} = \frac{70 \text{ GPa}}{210 \text{ GPa}} = \frac{\sigma_{ac}}{3} \quad (4)$

$$(4) \text{ dans } (1) \Rightarrow 2\sigma_{ac} \times A_{ac} + \frac{\sigma_{ac}}{3} \times A_{al} = P_y$$

$$\text{or } A_{ac} = A_{al} = 10 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} = 10 \text{ mm}^2$$

d'où

$$20\sigma_{ac} + \frac{10}{3}\sigma_{ac} = P_y$$

$$\text{on obtient : } \begin{cases} \sigma_{ac} = 150 \text{ MPa} \\ \sigma_{al} = 50 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\text{et } \varepsilon_y = \frac{\sigma_{ac}}{E_{al}} \times 100 = \frac{150}{210 \times 10^3} \times 100 = 0.07 \%$$

$\sigma_x$  n'est pas constante à travers l'épaisseur comme dans les matériaux isotropes. Il faut choisir une autre grandeur pour caractériser l'état de charge du stratifié.

$$\text{Équilibre des forces : } P_y = \sum_{k=1}^3 (\sigma_y)_k A_k$$

$$\text{or } A_k = t_k \times l_k \text{ et } l_k = c^{te} = l$$

$$\text{d'où : } P_y = \sum_{k=1}^3 (\sigma_y)_k \times t_k \times l_k = l \sum_{k=1}^3 (\sigma_y)_k \times t_k$$

On définit la contrainte résultante suivant la direction y comme :

$$N_y = \frac{P_y}{l} = \sum_{k=1}^3 (\sigma_y)_k \times t_k$$

$N_y$  est donc l'élément de réduction de contrainte  $\sigma_y$  dans l'épaisseur

$$N_y = \sum_{k=1}^n (\sigma_y)_k \times t_k$$

$(\sigma_y)_k$  peut être une fonction de z comme dans le cas de flexion.

$N_y$  représente la charge totale suivant la direction  $y$ , supportée par un stratifié d'épaisseur  $t$  et de largeur unitaire dans la direction  $x$ .  $\left( \text{unité} = \frac{\text{Force}}{\text{Largeur}} = \frac{\text{N}}{\text{mm}} = \text{MPa} \cdot \text{mm} \right)$

De façon plus générale,  $N_y$  s'écrit :

$$N_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y dz = \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_y)_k dz \right\} \quad (7.1)$$

$$N_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x dz = \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_x)_k dz \right\} \quad (7.2)$$

$$N_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} dz = \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_{xy})_k \{dz\} \right\} \quad (7.3)$$

Les moments résultants de flexion et de torsion s'écrivent de la même façon :

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x z dz = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_x)_k \times z dz \right\} \quad (7.4)$$

$$M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y z dz = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_y)_k \times z dz \right\} \quad (7.5)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} z dz = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\tau_{xy})_k \times z dz \right\} \quad (7.6)$$

L'unité de mesure  $M_{ij}$  est  $(\text{Force} \times \text{hauteur} / \text{largeur}) = \frac{\text{N} \cdot \text{mm}}{\text{mm}} = \text{N}$

Les trois  $N_{ij}$  et trois  $M_{ij}$  forment un système statiquement équivalent de l'état de contrainte du stratifié, mais qui est appliqué au plan moyen géométrique.

### Relations entre déformations et déplacements

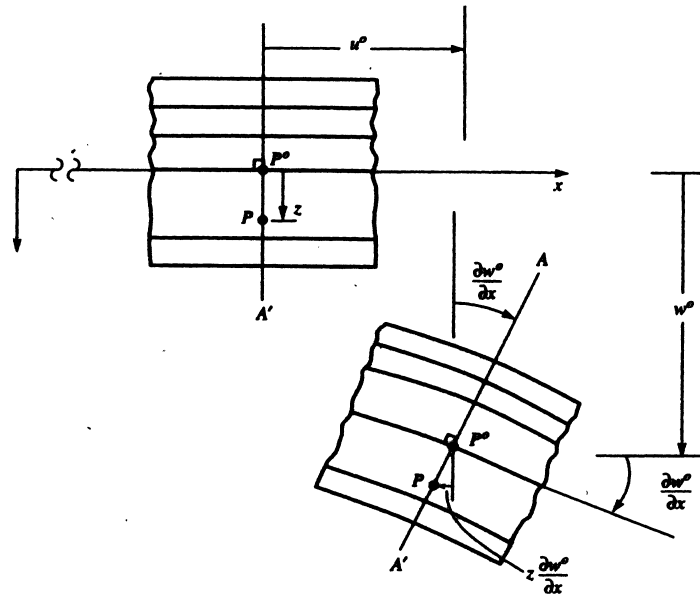
Les déplacements du plan moyen géométrique seront désignés par  $u^0$  et  $v^0$  suivant les directions  $x$  et  $y$ , et par  $w$  suivant la direction  $z$ .

$$\begin{aligned} u^0 &= u^0(x, y) \\ v^0 &= v^0(x, y) \\ w &= w(x, y) \end{aligned} \quad (7.7)$$

L'hypothèse des faibles déformations permet d'exprimer les déformations du plan moyen géométrique :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\end{aligned}\quad (7.8)$$

Le problème consiste à déterminer les déformations en un point  $\mathbf{p}$  situé à une distance quelconque  $z$  du plan moyen géométrique



**Figure 7.5** Section droite d'un stratifié avant et après l'action de la charge extérieure [Hyer]

Sous l'action de la charge externe, le point  $p^0$  qui est situé dans le PMG se déplace d'une distance  $u^0$  suivant la direction  $x$ . Selon l'hypothèse de Love-Kirchoff (les sections planes restent planes), la ligne  $pp^0$  reste droite et perpendiculaire au PMG. Le point  $p^0$  se déplace d'une distance :

$$\begin{aligned}u &= u_0 - z\beta_x \\ \text{Or } \quad \text{tg}\beta_x &\approx \beta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \\ \text{donc : } u &= u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\quad (7.9)$$

De la même façon, on obtient le déplacement du point  $\mathbf{p}$  suivant la direction  $y$  :

$$v = v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y}\quad (7.10)$$

En utilisant les relations entre déformations et déplacements, les composantes de la déformation en un point  $\mathbf{p}$  quelconque de l'épaisseur ont pour expression :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u^0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial u^0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_x^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (7.11)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( v^0 - z \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial v^0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varepsilon_y^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (7.12)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (7.13)$$

Le rayon de courbure du plan moyen géométrique peut s'exprimer en fonction de  $w$  :

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \kappa_x \quad (7.14)$$

d'où :  $\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z\kappa_x$

de la même façon on obtient :

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + z\kappa_y$$

$$\text{où : } \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\text{et } \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}$$

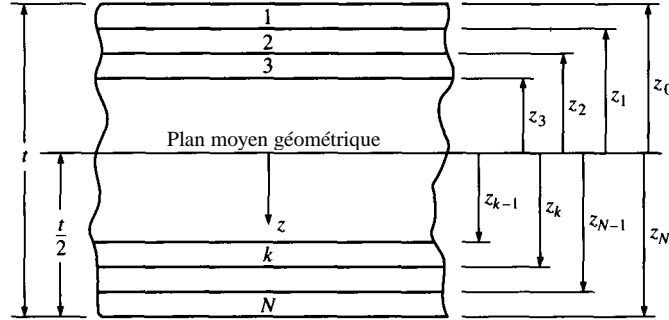
$$\text{où : } \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Le champ des déformations en un point quelconque de l'épaisseur d'un stratifié peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7.15)$$



### Relation entre les éléments de réduction et les déformations



**Figure 7.6 Géométrie et cotation des plis d'un stratifié [Gibson]**

Dans le  $k^e$  pli on a les relations suivantes :

$$\{\epsilon\}_k = \{\epsilon_k^0\} + z\{\kappa\}_k \quad (7.16)$$

Multipliant les deux membres de l'équation (7.16) par  $\begin{bmatrix} \bar{Q} \end{bmatrix}_k$

$$\begin{bmatrix} \bar{Q} \end{bmatrix}_k \{\epsilon_k\} = \begin{bmatrix} \bar{Q} \end{bmatrix}_k (\{\epsilon_k^0\} + z\{\kappa\}) \quad (7.17)$$

où 
$$\begin{bmatrix} \bar{Q} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}$$

L'état de contrainte dans le  $k^e$  pli s'écrit alors :

$$\{\sigma\}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q} \end{bmatrix}_k \{\epsilon_k^0\} + z \begin{bmatrix} \bar{Q} \end{bmatrix}_k \{\kappa\} \quad (7.18)$$

Les contraintes résultantes du stratifié peuvent être obtenues à l'aide des relations entre les contraintes dans un pli et les contraintes résultantes :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} \bar{Q} \end{bmatrix}_k \{\epsilon_k^0\} dz + \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} \bar{Q} \end{bmatrix}_k \{\kappa\} z dz \quad (7.19)$$

En considérant que :

$\{\varepsilon^0\}$  et  $\{\kappa\}$  du plan moyen géométrique sont indépendants de  $z$  :

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[ \bar{\mathbf{Q}} \right]_k \{\varepsilon^0\} dz = \left\{ \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[ \bar{\mathbf{Q}} \right]_k dz \right\} \{\varepsilon^0\} \text{ et } \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[ \bar{\mathbf{Q}} \right]_k \{\kappa\} z dz = \left\{ \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[ \bar{\mathbf{Q}} \right]_k z dz \right\} \{\kappa\}$$

$\left[ \bar{\mathbf{Q}} \right]_k$  est constante suivant l'épaisseur de chacun des plis :

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[ \bar{\mathbf{Q}} \right]_k dz = \sum_{k=1}^N \left\{ \left[ \bar{\mathbf{Q}} \right]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz \right\} \text{ et } \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[ \bar{\mathbf{Q}} \right]_k z dz = \sum_{k=1}^N \left\{ \left[ \bar{\mathbf{Q}} \right]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right\}$$

Les intégrales sont :

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} dz = z_k - z_{k-1} \quad (7.20)$$

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz = \frac{1}{2} (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

On obtient finalement :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \left\{ \left[ \bar{\mathbf{Q}} \right]_k (z_k - z_{k-1}) \right\} \{\varepsilon^0\} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left\{ \left[ \bar{\mathbf{Q}} \right]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right\} \{\kappa\} \quad (7.21)$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7.22)$$

Avec  $A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1})$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

**[A] est la matrice de rigidité en membrane et [B] est la matrice de couplage membrane-flexion-torsion.**

De façon similaire, pour les moments résultants, on a :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} \bar{Q} \\ \bar{Q} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \varepsilon^0 \\ \gamma^0 \end{Bmatrix} z dz + \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} \bar{Q} \\ \bar{Q} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa \\ \kappa \\ \kappa \end{Bmatrix} z^2 dz \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left\{ \begin{bmatrix} \bar{Q} \\ \bar{Q} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right\} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \varepsilon^0 \\ \gamma^0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \left\{ \begin{bmatrix} \bar{Q} \\ \bar{Q} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right\} \begin{Bmatrix} \kappa \\ \kappa \\ \kappa \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7.23)$$

soit :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned} \text{Avec : } B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned}$$

**[D] est la matrice de rigidité en flexion et torsion.**

Finalement, les relations entre les éléments de réduction et les déformations du plan moyen géométrique peuvent s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7.25)$$

ou :

$$\begin{Bmatrix} N \\ - \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & | & B \\ - & | & - \\ B & | & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ - \\ \kappa \end{Bmatrix} = E \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ - \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (7.26)$$

**E est la matrice de rigidité du stratifié**

### 7.3 Matrice de rigidité des stratifiés

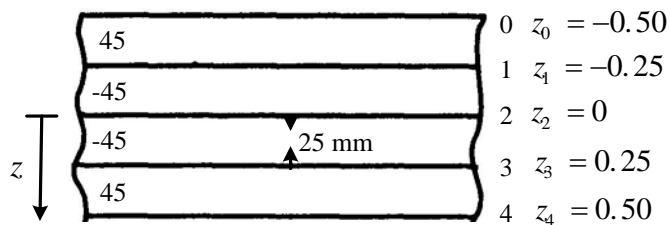
#### Stratifié symétrique

Le pli à la hauteur  $z$  a les mêmes caractéristiques relatives à l'épaisseur, au matériau et à l'orientation que celui qui se trouve à  $-z$ .

**Remarque :** La matrice  $[B]$  d'un stratifié symétrique est nulle.

**Exemple 7.1** Soit un stratifié  $[45/-45/-45/45]$  de composite carbone/époxy AS/3501, dont les plis ont une épaisseur de  $t = 0.25$  mm. Calculez la matrice de rigidité du stratifié.

#### Solution



Selon table (2.2)  $\begin{cases} E_1 = 138 \text{ GPa} \\ E_2 = 9 \text{ GPa} \end{cases} \quad \begin{cases} G_{12} = 6.9 \text{ GPa} \\ \nu_{12} = 0.3 \end{cases}$

$$\nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1} = 0.3 \times \frac{9}{138} = 0.0196$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \text{SYM} & & G_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 138.81 & 2.72 & 0 \\ 2.72 & 9.05 & 0 \\ 0 & 0 & 6.9 \end{bmatrix}$$

$$-\nu_{12}\nu_{21} = 1 - 0.3 \times 0.0196 = 0.9941 \quad Q_{22} = \frac{9}{0.9941} = 9.48$$

$$Q_{11} = \frac{138}{1 - 0.3 \times 0.0196} = 138.81, \quad Q_{12} = \frac{0.3 \times 9}{0.9941} = 2.72$$

$$[\bar{Q}] = [T(\theta)]^{-1}[Q][T^1(\theta)]$$

$$[\bar{Q}]_{45} = \begin{bmatrix} 45.22 & 31.42 & 32.44 \\ 31.42 & 45.22 & 32.44 \\ 32.44 & 32.44 & 35.6 \end{bmatrix} \text{GPa} \quad [\bar{Q}]_{-45} = \begin{bmatrix} 45.22 & 31.42 & -32.44 \\ 31.42 & 45.22 & -32.44 \\ -32.44 & -32.44 & 35.6 \end{bmatrix} \text{GPa}$$

$$A_{11} = (\bar{Q}_{11})_1(z_1 - z_0) + (\bar{Q}_{11})_2(z_2 - z_1) + (\bar{Q}_{11})_3(z_3 - z_2) + (\bar{Q}_{11})_4(z_4 - z_3)$$

$$= 45.22 \times \overbrace{(-0.25 + 0.5)}^{0.25} + 45.22 \overbrace{(0 + 0.25)}^{0.25} + 45.22 \overbrace{(0.25 - 0)}^{0.25} + 45.22 \overbrace{(0.5 - 0.25)}^{0.25}$$

$$= 45.22[0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25] = 45.22$$

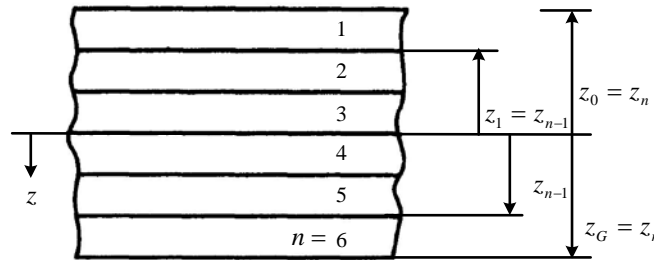
$$[A] = \begin{bmatrix} 45.22 & 31.42 & 0 \\ 31.42 & 45.22 & 0 \\ 0 & 0 & 35.6 \end{bmatrix} \text{GPa} - \text{mm} \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{GPa} - \text{mm}^2$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 3.77 & 2.62 & 2.03 \\ 2.62 & 3.77 & 2.03 \\ 2.03 & 2.03 & 2.97 \end{bmatrix} \text{GPa} - \text{mm}^3$$

**Exemple 7.2** Prouvez que pour les stratifiés symétriques  $[B_{ij}] = 0$ .

**Solution**

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$



Considérons le pli n° 1 et n

$$\left. \begin{array}{l} \text{Stratifié symétrique} \\ \text{pli n° 1 et n} \end{array} \right\} \begin{array}{l} z_0 = -z_n \\ z_1 = -z_{n-1} \end{array}$$

$$\text{Symétrie} \Rightarrow (\bar{Q}_{ij})_1 = (\bar{Q}_{ij})_n = c^{te} = C$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \left[ (\bar{Q}_{ij})_1 (z_1^2 - z_0^2) + \dots + (\bar{Q}_{ij})_n (z_n^2 - z_{n-1}^2) \right]$$

d'où :

$$B_{ij} = \frac{C}{2} \left[ (+z_{n-1}^2 - z_n^2) + \dots + (z_n^2 - z_{n-1}^2) \right] = 0$$

**Stratifié équilibré / non symétrique (antisymétrique)**

Un stratifié équilibré et non symétrique est constitué de plis de même épaisseur et qui sont disposés de façon antisymétrique, ce qui veut dire que le pli au niveau  $z$  a une orientation  $+\theta$  tandis que celle du pli au niveau  $-z$  est  $-\theta$ . Notons que  $\theta \neq 0$  et  $\theta \neq 90$ .

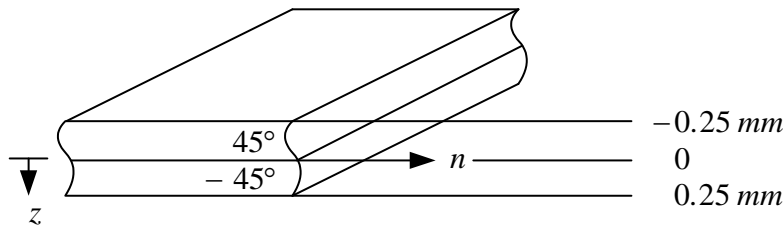
Exemple :  $[-45/-45/45/45]$

Pour ce type de stratifié, on a les matrices de rigidité suivantes :

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{16} \\ 0 & 0 & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & 0 \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$$

**Exemple 7.3** Soit un stratifié  $[45 / -45]$  de composite carbone/époxy AS/3501 dont les plis ont une épaisseur de 0.25 mm. Déterminer la matrice de rigidité du stratifié.

**Solution**



$$[\bar{Q}]_{45} = \begin{bmatrix} 45.22 & 31.42 & 32.44 \\ 31.42 & 45.22 & 32.44 \\ 32.44 & 32.44 & 35.6 \end{bmatrix} \text{ GPa} \quad [\bar{Q}]_{-45} = \begin{bmatrix} 45.22 & 31.42 & -32.44 \\ 31.42 & 45.22 & -32.44 \\ -32.44 & -32.44 & 35.6 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) = (\bar{Q}_{ij})_{45} (t) + (\bar{Q}_{ij})_{-45} (t)$$

où  $t = 0.25 \text{ mm}$

$$A_{11} = (\bar{Q}_{11})_{45} (t) + (\bar{Q}_{11})_{-45} (t) = 45.22 \times 0.25 + 45.22 \times 0.25 \\ = 22.61 \text{ GPa} \cdot \text{mm} = A_{22} \text{ (à cause de } Q_{11} = Q_{22} \text{)}$$

$$A_{12} = (\bar{Q}_{12})_{45} (t) + (\bar{Q}_{12})_{-45} (t) = 31.42 \times 0.25 + 31.42 \times 0.25 \\ = 15.71 \text{ GPa} \cdot \text{mm} = A_{21}$$

$$A_{16} = A_{26} = (\bar{Q}_{16})_{45} (t) + (\bar{Q}_{16})_{-45} (t) = 32.44 \times 0.25 - 32.44 \times 0.25$$

$$A_{66} = (\bar{Q}_{66})_{45} (t) + (\bar{Q}_{66})_{-45} (t) = 0 \\ = 35.6 \times 0.25 + 35.6 \times 0.25 = 17.8 \text{ GPa} \cdot \text{mm}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 22.61 & 15.71 & 0 \\ 15.71 & 22.61 & 0 \\ 0 & 0 & 17.8 \end{bmatrix} \text{ GPa} \cdot \text{mm} \text{ ou } \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \times \text{mm} = \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Les coefficients de la matrice de couplage sont :  $B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\overline{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$

d'où :

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{1}{2} \left[ (\overline{Q}_{11})_{45} (z_1^2 - z_0^2) + (\overline{Q}_{11})_{-45} (z_2^2 - z_1^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} [45.22(0 - 0.25^2) + 45.22(0.25^2 - 0)] = 0 = B_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{12} &= \frac{1}{2} \left[ (\overline{Q}_{12})_{45} (z_1^2 - z_0^2) + (\overline{Q}_{12})_{-45} (z_2^2 - z_1^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} [31.42(0 - 0.25^2) + 31.42(0.25^2 - 0)] = 0 = B_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{16} &= \frac{1}{2} [32.44(0 - 0.25^2) - 32.44(0.25^2 - 0)] = -2.027 \text{ GPa mm}^2 \\ &= B_{26} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{66} &= \frac{1}{2} \left[ (\overline{Q}_{66})_{45} (z_1^2 - z_0^2) + (\overline{Q}_{66})_{-45} (z_2^2 - z_1^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} [35.6 \times (0 - 0.25^2) + 35.6(0.25^2 - 0)] = 0 \end{aligned}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2.027 \\ 0 & 0 & -2.027 \\ -2.027 & -2.027 & 0 \end{bmatrix} \text{ GPa-mm}^2 \text{ ou } 10^3 \text{ N}$$

Rigidité en flexion :

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\overline{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

d'où

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{1}{3} \left[ (\overline{Q}_{11})_{45} (z_1^3 - z_0^3) + (\overline{Q}_{11})_{-45} (z_2^3 - z_1^3) \right] \\ &= \frac{1}{3} [45.22(0 - (-0.25)^3) + 45.22(0.25^3 - 0)] = 0.471 \end{aligned}$$

$$D_{12} = 0.327 \text{ GPa-mm}^2 = D_{21}$$

$$D_{16} = D_{26} = 0$$

$$D_{66} = \frac{1}{3} [35.6(0 - 0.25^3) + 35.6(0.25^3 - 0)] = 0.371 \text{ GPa-mm}^2$$



et 
$$[D] = \begin{bmatrix} 0.471 & 0.327 & 0 \\ 0.327 & 0.471 & 0 \\ 0 & 0 & 0.371 \end{bmatrix} \text{ GPa} \cdot \text{mm}^3$$

### Stratifié quasi – isotrope

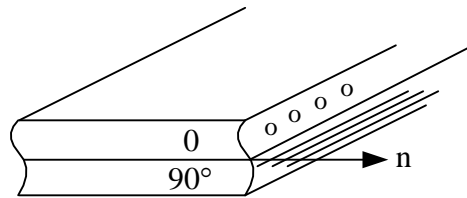
Exemple  $[60/0/-60]$  et  $[90/45/0/-45]$

Pour ce type de stratifié, on a :

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_{11} - A_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

**Exemple 7.4** Prouvez que le stratifié  $(0/90)$  n'est pas nécessairement quasi-isotrope.

### Solution



$$[Q]_0 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} = [\bar{Q}]_0$$

$$[\bar{Q}]_{90} = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \left( \overline{Q}_{ij} \right)_k \underbrace{(z_k - z_{k-1})}_t$$

$$A_{11} = \left( \overline{Q}_{11} \right)_0 (t) + \left( \overline{Q}_{11} \right)_{90} (t) = Q_{11} t + Q_{22} t = (Q_{11} + Q_{22}) t$$

Supposons que le stratifié a une épaisseur  $t = 1$ , on obtient :

$$A_{11} = (\overline{Q}_{11} + \overline{Q}_{22})$$

$$A_{12} = \left( \overline{Q}_{12} \right)_0 (t) + \left( \overline{Q}_{12} \right)_{90} (t) = 2 Q_{12} t = 2Q_{12}$$

$$A_{16} = 0$$

$$A_{22} = \left( \overline{Q}_{22} \right)_0 (t) + \left( \overline{Q}_{22} \right)_{90} (t) = (Q_{22} + Q_{11}) t = (Q_{22} + Q_{11})$$

$$A_{66} = \left( \overline{Q}_{66} \right)_0 t + \left( \overline{Q}_{66} \right)_{90} t = 2Q_{66}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} (Q_{11} + Q_{22}) & 2Q_{12} & 0 \\ 2Q_{12} & (Q_{11} + Q_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix}$$

Pour un stratifié quasi-isotrope, on a

$$A_{11} = A_{22} \quad (1)$$

$$\text{et} \quad A_{66} = \frac{A_{11} - A_{12}}{2} \quad (2)$$

La matrice  $[A]$  donne :

$$A_{11} = (Q_{11} + Q_{22}) = A_{22} \quad (3) \quad \text{Ok}$$

$$A_{66} = 2Q_{66} = \frac{\overbrace{Q_{11} + Q_{22}}^{A_{11}} - \overbrace{2Q_{12}}^{A_{12}}}{2} \quad (4) \quad \text{pas nécessairement}$$

$$A_{66} = \frac{A_{11} - A_{12}}{2}$$

## 7.4 Matrice de souplesse des stratifiés

### Inversion de la matrice de rigidité

Les relations entre les forces résultantes et les déformations sont :

$$\begin{Bmatrix} N \\ - \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & | & B \\ - & | & - \\ B & | & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ - \\ \kappa \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ - \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (7.27)$$

Inversement

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ - \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & | & B \\ - & | & - \\ B & | & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N \\ - \\ M \end{Bmatrix} = [E]^{-1} \begin{Bmatrix} N \\ - \\ M \end{Bmatrix} \quad (7.28)$$

La matrice de souplesse d'un stratifié est l'inverse de sa matrice de rigidité. On peut inverser la matrice de rigidité  $[E]$  du stratifié soit directement soit par une méthode alternative (par partition) démontrée par Halpin :

$$[E]^{-1} = \begin{bmatrix} A' & | & B' \\ - & | & - \\ B' & | & D' \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

où :

$$[A'] = [A^*] - [B^*][D^*]^{-1}[C^*]$$

$$[B'] = [B^*][D^*]^{-1}$$

$$[C'] = -[D^*]^{-1}[C^*] = [B']$$

$$[D'] = [D^*]^{-1}$$

et

$$[A^*] = [A]^{-1}$$

$$[B^*] = -[A]^{-1}[B]$$

$$[C^*] = [B][A]^{-1}$$

$$[D^*] = [D] - [B][A]^{-1}[B]$$

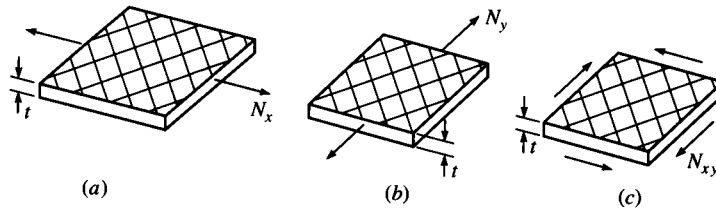
### Calcul des constantes élastiques équivalentes de stratifiés

Les constantes élastiques sont parfois plus utiles que les matrices de rigidité [A], [B] et [D]. Ces constantes peuvent se déterminer en utilisant les matrices [A'], [B'] et [D'].

#### *Stratifié symétrique soumis au chargement dans son plan*

Dans ce cas, [B] = 0, d'où  $\{\varepsilon_x\} = \{\varepsilon_0\}$ . Par conséquent, le champ des déformations devient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{16} \\ A'_{12} & A'_{22} & A'_{26} \\ A'_{16} & A'_{26} & A'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7.30)$$



**Figure 7.7 Stratifiés soumis aux chargements dans son plan [Gibson]**

$$\text{Chargement } \begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \varepsilon_x^0 = A'_{11} N_x, \quad \varepsilon_y^0 = A'_{12} N_x \text{ et } \gamma_{xy}^0 = A'_{16} N_x$$

Les constantes élastiques sont :

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x^0} = \frac{\frac{N_x}{t}}{A'_{11} N_x} = \frac{1}{t A'_{11}} \quad (7.31)$$

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y^0}{\varepsilon_x^0} = -\frac{A'_{12}}{A'_{11}} \quad (7.32)$$

$$\eta_{x,xy} = \frac{\gamma_{xy}^0}{\varepsilon_x^0} = \frac{A'_{16}}{A'_{11}} \quad (7.33)$$

$$\text{Chargement } \begin{Bmatrix} 0 \\ N_y \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \varepsilon_y^0 = A'_{22} N_y$$

$$E_y = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y^0} = \frac{\frac{N_y}{t}}{A'_{22}} = \frac{1}{tA'_{22}} \quad (7.34)$$

$$\text{Chargement} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \varepsilon_y^0 = A'_{26} N_{xy} \text{ et } \gamma_{xy}^0 = A'_{26} N_{xy}$$

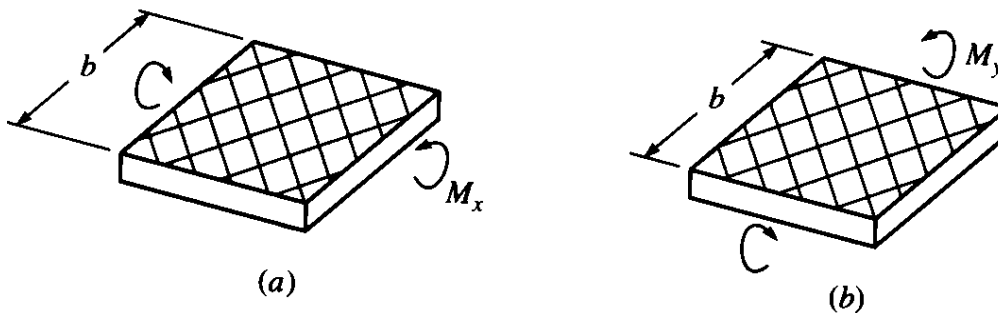
$$G_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}^0} = \frac{\frac{N_{xy}}{t}}{A'_{66}} = \frac{1}{tA'_{66}} \quad (7.35)$$

$$\eta_{xy,y} = \frac{\varepsilon_y^0}{\gamma_{xy}^0} = \frac{A'_{26}}{A'_{66}} \quad (7.36)$$

***Stratifié symétrique soumis à un moment de flexion***

Les relations entre les rayons de courbure et les moments sont :

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D'_{11} & D'_{12} & D'_{16} \\ D'_{12} & D'_{22} & D'_{26} \\ D'_{16} & D'_{26} & D'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7.37)$$



**Figure 7.8 Stratifiés en flexion pure [Gibson]**

$$\text{Chargement } \begin{Bmatrix} M_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \kappa_x = D'_{11} M_x = D'_{11} \frac{M}{b} = \frac{1}{\rho_x}$$

$$\text{car } \kappa_x = \frac{1}{\rho_x}$$

$$\text{or } \frac{1}{\rho_x} = \frac{M}{E_{fx} I_{yy}} = \frac{M}{E_{fx} \frac{bt^3}{12}}$$

Le module effectif en flexion du stratifié suivant la direction x est donc :

$$E_{fx} = \frac{12}{t^3 D_{11}} \quad (7.38)$$

De la même façon, on obtient :

$$E_{fy} = \frac{12}{t^3 D_{22}} \quad (7.39)$$

### Vérification expérimentale

La théorie classique des stratifiés peut être vérifiée expérimentalement en mesurant les déformations dans un stratifié qui est soumis aux chargements connus. Ces valeurs mesurées seront par la suite comparées avec les valeurs calculées à l'aide de la théorie. Tsai a proposé cette méthodologie afin de vérifier les résultats théoriques des stratifiés de composite verre-époxy [Tsai, 1964].

#### Détermination des déformations et courbures

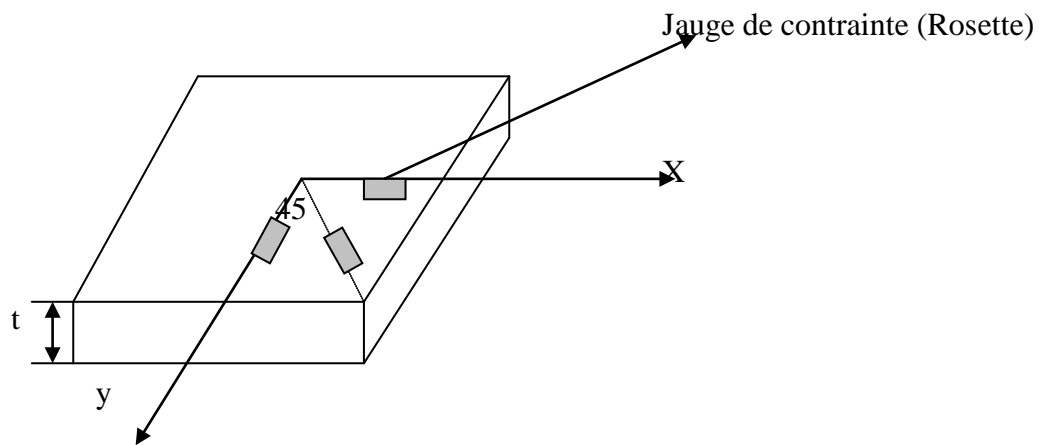


Figure 7.9 Rosette collée à la surface supérieure d'un stratifié [Gibson]

Collons une rosette à la surface supérieure et une autre sur la surface inférieure de l'éprouvette.

À la surface supérieure, les déformations suivant les directions x et y sont :

$$\varepsilon_x^{\text{sup}} = \varepsilon_x^0 - \frac{t}{2} \kappa_x \quad (7.40)$$

$$\varepsilon_y^{\text{sup}} = \varepsilon_y^0 - \frac{t}{2} \kappa_y \quad (7.41)$$

À la surface inférieure, on a :

$$\varepsilon_x^{\text{inf}} = \varepsilon_x^0 + \frac{t}{2} \kappa_x \quad (7.42)$$

$$\varepsilon_y^{\text{inf}} = \varepsilon_y^0 + \frac{t}{2} \kappa_y \quad (7.43)$$

$$(7.40) \text{ et } (7.42) \Rightarrow \varepsilon_x^0 \text{ et } \kappa_x$$

$$(7.41) \text{ et } (7.43) \Rightarrow \varepsilon_y^0 \text{ et } \kappa_y$$

La déformation suivant la direction  $\theta$  s'écrit comme suit :

$$\varepsilon_\theta^{\text{sup}} = \varepsilon_x^{\text{sup}} \cos^2(\theta) + \varepsilon_y^{\text{sup}} \sin^2(\theta) + \gamma_{xy}^{\text{sup}} \cos(\theta) \sin(\theta) \quad (7.44)$$

pour  $\theta=45^\circ$  la déformation angulaire est :

$$(\gamma_{xy}^{\text{sup}})_{45} = 2\varepsilon_{45}^{\text{sup}} - (\varepsilon_x^{\text{sup}} + \varepsilon_y^{\text{sup}}) \quad (7.45)$$

$$(\gamma_{xy}^{\text{inf}})_{45} = 2\varepsilon_{45}^{\text{inf}} - (\varepsilon_x^{\text{inf}} + \varepsilon_y^{\text{inf}}) \quad (7.46)$$

or :

$$\gamma_{xy}^{\text{sup}} = \gamma_{xy}^0 - \frac{t}{2} \kappa_{xy} \quad (7.47)$$

$$\gamma_{xy}^{\text{inf}} = \gamma_{xy}^0 + \frac{t}{2} \kappa_{xy} \quad (7.48)$$

La résolution du système comportant ces dernières 4 équations, on obtiendra :  $\gamma_{xy}^0$  et  $\kappa_{xy}$ .

En utilisant cette éprouvette instrumentée des jauges de contraintes, il est donc, possible de déterminer les coefficients des matrices  $[A']$ ,  $[B']$  et  $[D']$  à partir des données expérimentales.

***Détermination des matrices [A'] et [B'] à l'aide d'un essai de traction***

Dans un essai de traction suivant la direction x, les déformations du PMG d'un stratifié sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{16} \\ A'_{12} & A'_{22} & A'_{26} \\ A'_{16} & A'_{26} & A'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_x^0 = A'_{11} N_x \Rightarrow A'_{11} = \frac{\varepsilon_x^0}{N_x}$$

$$\varepsilon_y^0 = A'_{12} N_x \Rightarrow A'_{12} = \frac{\varepsilon_y^0}{N_x} \quad (7.49)$$

$$\gamma_{xy}^0 = A'_{16} N_x \Rightarrow A'_{16} = \frac{\gamma_{xy}^0}{N_x}$$

Les courbures causées par  $N_x$  sont :

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} & B'_{16} \\ B'_{12} & B'_{22} & B'_{26} \\ B'_{16} & B'_{26} & B'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\kappa_x = B'_{11} N_x \Rightarrow B'_{11} = \frac{\kappa_x}{N_x}$$

$$\kappa_y = B'_{12} N_x \Rightarrow B'_{12} = \frac{\kappa_y}{N_x} \quad (7.50)$$

$$\kappa_{xy} = B'_{16} N_x \Rightarrow B'_{16} = \frac{\kappa_{xy}}{N_x}$$

***Détermination de [D'] à l'aide d'un essai de flexion pure***

Chargement :  $\begin{Bmatrix} M_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$



Les coefficients de la matrice  $[D']$  sont :

$$\begin{aligned} D'_{11} &= \frac{\kappa_x}{M_x} \\ D'_{12} &= \frac{\kappa_y}{M_x} \\ D'_{16} &= \frac{\kappa_{xy}}{M_x} \end{aligned} \quad (7.51)$$

## 7.5 Calcul des contraintes et déformations dans les plis

Dans le  $k^e$  pli, les contraintes sont :

$$\left\{ \sigma_{(x,y)} \right\}_k = \begin{bmatrix} - \\ \end{bmatrix}_k \left\{ \varepsilon_{(x,y)}^0 \right\} + z_k \left\{ \kappa_{(x,y)} \right\}$$

$$\text{où } \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & | & B \\ \hline B & | & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & | & B' \\ \hline B' & | & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (7.52)$$

**Exemple 7.5** Un stratifié  $[45/-45]$  de composite carbone/époxy AS/3501 dont les plis ont une épaisseur de 0.25 mm est soumis à une force de traction uniaxiale  $N_x = 30 \text{ MPa} - \text{mm}$  ou  $N/\text{mm}$ , calculez les déformations et les contraintes dans les plis du stratifié.

### Solution

À partir des résultats de l'exemple 7.8, on obtient la matrice de rigidité :

$$[E] = \begin{bmatrix} \underline{A} & | & \underline{B} \\ \hline \underline{B} & | & \underline{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.61 & 15.71 & 0 & | & 0 & 0 & -2.027 \\ 15.71 & 22.61 & 0 & | & 0 & 0 & -2.027 \\ 0 & 0 & 17.8 & | & -2.027 & -2.027 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2.027 & | & 0.471 & 0.327 & 0 \\ 0 & 0 & -2.027 & | & 0.327 & 0.471 & 0 \\ -2.027 & -2.027 & 0 & | & 0 & 0 & 0.371 \end{bmatrix}$$

Unités =  $A_{ij}$  (GPa – mm)  
 $B_{ij}$  (GPa – mm<sup>2</sup>)  
 $D_{ij}$  (GPa – mm<sup>3</sup>)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = [E]^{-1} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}$$

$$\left( \frac{1}{GPa - mm} \right) \times (MPa - mm) \times 10^{-3} GPa / MPa$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = [E]^{-1} \begin{Bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 0.003043 \text{ mm/mm} \\ -0.001183 \text{ mm/mm} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.01017 \text{ mm}^{-1} \end{Bmatrix}$$

Pli	Location (mm)	$\sigma_x$ (MPa)	$\sigma_y$ (MPa)	$\tau_{xy}$ (MPa)
N° 1 sup.	-0.25	18.74	-41.26	-30.18
N° 1 inf.	0.0	101.3	41.26	60.36
N° 2 sup.	0.0	101.3	41.26	-60.36
N° 2 inf.	0.25	18.74	-41.26	30.18

1<sup>er</sup> pli

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{K=1 \text{ Supérieur}} = [\bar{Q}]_{45} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{K=1 \text{ Supérieur}}$$

avec

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{\text{Supérieur}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Z\kappa_x \\ Z\kappa_y \\ Z\kappa_{xy} \end{Bmatrix}_{\text{Supérieur}}$$

## 7.6 Influence de l'humidité et de la température

### Dégradation des propriétés mécaniques

L'humidité et la température affaiblissent les propriétés des composites notamment  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  et  $\nu_{12}$ . Par conséquent, les propriétés mécaniques d'un stratifié qui est exposé à un environnement chaud et humide seront affectées par la chaleur et par l'humidité.

### Contraintes hygrothermiques

Dans le  $k^e$  pli, les déformations totales comprennent les déformations mécaniques, hygroscopiques et thermiques :

$$\{\varepsilon_{(x,y)}\}_k = \left[ \bar{S} \right]_k \left\{ \sigma_{(x,y)} \right\}_k + \left\{ \alpha_{(x,y)} \right\}_k \Delta T + \left\{ \beta_{(x,y)} \right\}_k C \quad (7.53)$$

par conséquent, les contraintes sont :

$$\left\{ \sigma_{(x,y)} \right\}_k = \left[ \bar{Q} \right]_k \left( \left\{ \varepsilon_{(x,y)} \right\}_k - \left\{ \alpha_{(x,y)} \right\}_k \Delta T + \left\{ \beta_{(x,y)} \right\}_k C \right) \quad (7.54)$$

Dans le cas d'un pli, lorsque les déformations totales  $\{\varepsilon\} = 0$ , les contraintes hygrothermiques sont :

$$\{\sigma\} = \left[ \bar{Q} \right] (-\{\alpha\} \Delta T - \{\beta\} C) \quad (7.55)$$

Pour les stratifiés, en général  $\{\varepsilon\}_k = \{\varepsilon^0\} + z\{\kappa\} \neq 0$

Les contraintes totales incluant les contraintes hygrothermiques deviennent alors :

$$\{\sigma\}_k = \left[ \bar{Q} \right]_k \left( \{\varepsilon^0\} + z\{\kappa\} - \{\alpha\}_k \Delta T + \{\beta\}_k C \right) \quad (7.56)$$

Les contraintes résultantes totales peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
 \{N_{(x,y)}\} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \{\sigma_{(x,y)}\}_k dz \\
 &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[ \bar{Q} \right]_k \left( \{\varepsilon_{(x,y)}^0\} + z \{\kappa_{(x,y)}\} - \{\alpha_{(x,y)}\}_k \Delta T - \{\beta_{(x,y)}\}_k C \right) dz \quad (7.57) \\
 &= [A] \{\varepsilon_{(x,y)}^0\} + [B] \{\kappa_{(x,y)}^0\} - \{N_{(x,y)}^T\} - \{N_{(x,y)}^H\}
 \end{aligned}$$

où les contraintes résultantes d'origine thermique sont :

$$\{N_{(x,y)}^T\} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[ \bar{Q} \right]_k \{\alpha_{(x,y)}\}_k \Delta T dz = \Delta T \sum_{k=1}^n \left[ \bar{Q} \right]_k \{\alpha_{(x,y)}\}_k (z_k - z_{k-1}) \quad (7.58)$$

et les contraintes résultantes hygroscopiques sont :

$$\{N_{(x,y)}^H\} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[ \bar{Q} \right]_k \{\beta_{(x,y)}\}_k C dz = C \sum_{k=1}^n \left[ \bar{Q} \right]_k \{\beta_{(x,y)}\}_k (z_k - z_{k-1}) \quad (7.59)$$

De façon similaire, les moments résultants peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
 \{M_{(x,y)}\} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \{\sigma_{(x,y)}\}_k z dz \\
 &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[ \bar{Q} \right]_k \left( \{\varepsilon_{(x,y)}^0\} + z \{\kappa_{(x,y)}\} - \{\alpha_{(x,y)}\}_k \Delta T - \{\beta_{(x,y)}\}_k C \right) z dz \quad (7.60) \\
 &= [B] \{\varepsilon_{(x,y)}^0\} + [D] \{\kappa_{(x,y)}\} - \{M_{(x,y)}^T\} - \{M_{(x,y)}^H\}
 \end{aligned}$$

où les moments résultants thermiques sont :

$$\{M_{(x,y)}^T\} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[ \bar{Q} \right]_k \{\alpha_{(x,y)}\}_k \Delta T z dz = \frac{\Delta T}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_k \{\alpha_{(x,y)}\}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (7.61)$$

et les moments résultants hygroscopiques sont :

$$\{M_{(x,y)}^H\} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[ \bar{Q} \right]_k \{\beta_{(x,y)}\}_k C z dz = \frac{C}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_k \{\beta_{(x,y)}\}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (7.62)$$

En réarrangeant les équations (7.57) et (7.60), on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \{N_{(x,y)}\} + \{N_{(x,y)}^T\} + \{N_{(x,y)}^H\} &= [A]\{\varepsilon_{(x,y)}^0\} + [B]\{\kappa_{(x,y)}\} \\ \{M_{(x,y)}\} + \{M_{(x,y)}^T\} + \{M_{(x,y)}^H\} &= [B]\{\varepsilon_{(x,y)}^0\} + [D]\{\kappa_{(x,y)}\} \end{aligned} \quad (7.63)$$

ou encore :

$$\begin{Bmatrix} N_{(x,y)}^E \\ \vdots \\ M_{(x,y)}^E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & | & B \\ \vdots & & \vdots \\ B & | & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{(x,y)}^0 \\ \vdots \\ \kappa_{(x,y)} \end{Bmatrix} \quad (7.64)$$

où les contraintes et les moments résultants effectifs sont :

$$\begin{aligned} \{N_{(x,y)}^E\} &= \{N_{(x,y)}\} + \{N_{(x,y)}^T\} + \{N_{(x,y)}^H\} \\ \{M_{(x,y)}^E\} &= \{M_{(x,y)}\} + \{M_{(x,y)}^T\} + \{M_{(x,y)}^H\} \end{aligned} \quad (7.65)$$

**Remarque:**

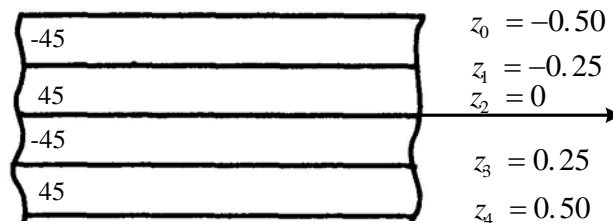
**$\{N\}$  et  $\{M\}$  sont les contraintes et les moments résultants mécaniques externes.**

Les déformations sont obtenues en inversant la relation (7.64) :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{(x,y)}^0 \\ \vdots \\ \kappa_{(x,y)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & | & B \\ \vdots & & \vdots \\ B & | & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N_{(x,y)}^E \\ \vdots \\ M_{(x,y)}^E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & | & B' \\ \vdots & & \vdots \\ B' & | & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{(x,y)}^E \\ \vdots \\ M_{(x,y)}^E \end{Bmatrix} \quad (7.66)$$

**Exemple 7.6** Un stratifié  $[-45/45/-45/45]$  de composite carbone/époxy AS/3501 dont les plis ont une épaisseur de 0.25 mm, est chauffé de  $T_1 = 20^\circ\text{C}$  à  $T_2 = 100^\circ\text{C}$ . Supposons que les propriétés ne sont pas influencées par la température, calculez les contraintes thermiques engendrées.

**Solution**



$$\text{Tab. 5.2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0.88 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C} \\ \alpha_2 = 31.0 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C} \\ \alpha_{12} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} = [T'(\theta)]^{-1} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_{45} = [T'(45)]^{-1} \begin{Bmatrix} 0.88 \\ 31.0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-6} / ^\circ\text{C} = \begin{Bmatrix} 15.94 \\ 15.94 \\ 30.12 \end{Bmatrix} \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_{-45} = [T'(-45)]^{-1} \begin{Bmatrix} 0.88 \\ 31.0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-6} / ^\circ\text{C} = \begin{Bmatrix} 15.94 \\ 15.94 \\ -30.12 \end{Bmatrix} \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$$

$$\{N_{(x,y)}^T\} = \Delta T \sum_{k=1}^{\alpha} [\bar{Q}]_k \{\alpha_{(x,y)}\}_k (z_k - z_{k-1})$$

$$\{N_{(x,y)}^T\} = (\Delta T) \left( [\bar{Q}]_{-45} \{\alpha_{(x,y)}\}_{-45} + [\bar{Q}]_{45} \{\alpha_{(x,y)}\}_{45} \right) \times 2 \times 0.25 = \begin{Bmatrix} 19.5755 \\ 19.5755 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{MPa} - \text{mm}$$

$$\begin{aligned} \{M_{(x,y)}^T\} &= \frac{\Delta T}{2} \left( [\bar{Q}]_{-45} \{\alpha_{(x,y)}\}_{-45} (z_1^2 - z_0^2) + [\bar{Q}]_{45} \{\alpha_{(x,y)}\}_{45} (z_2^2 - z_1^2) \right. \\ &\quad \left. + [\bar{Q}]_{-45} \{\alpha_{(x,y)}\}_{-45} (z_3^2 - z_2^2) + [\bar{Q}]_{45} \{\alpha_{(x,y)}\}_{45} (z_4^2 - z_3^2) \right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.3834 \end{Bmatrix} \text{MPa} - \text{mm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = [E]^{-1} \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.000307 \\ 0.000307 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.000967 \end{Bmatrix}$$

Contraintes :

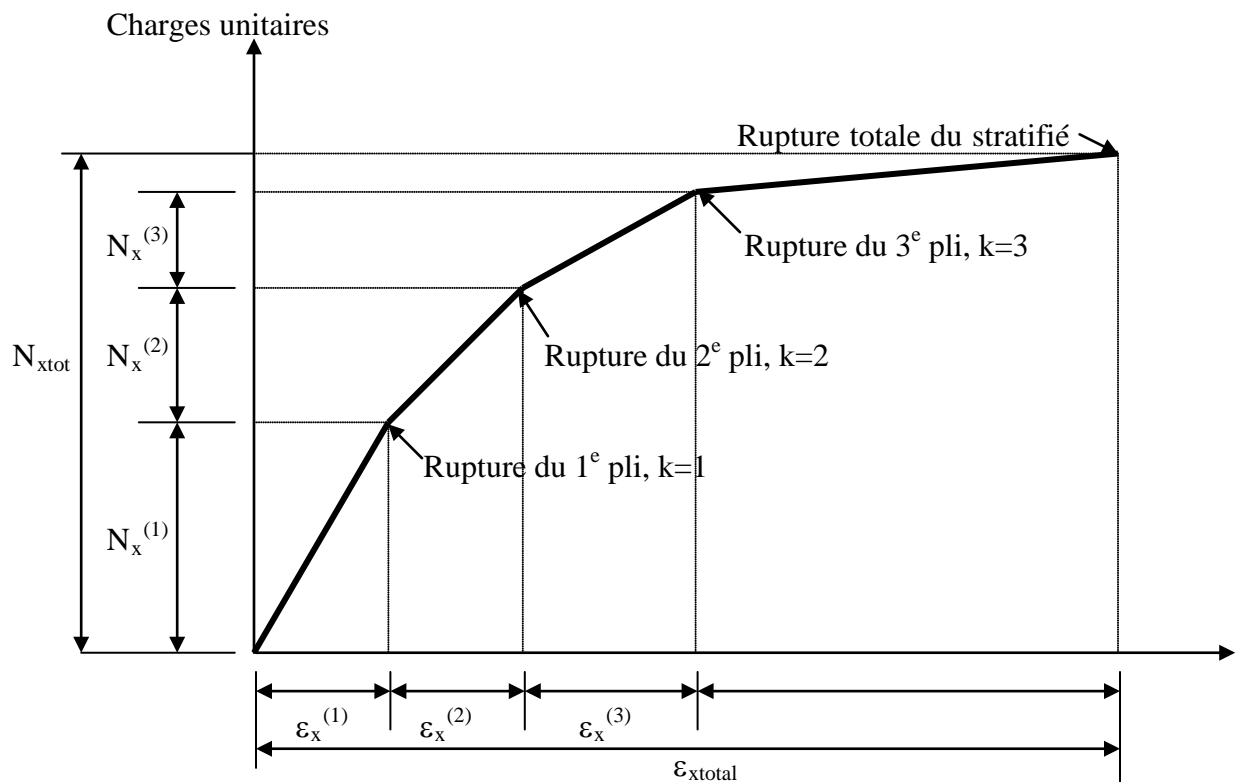
$$\{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k \left( \{\varepsilon^0\} + z \{k\} - \{\alpha\}_k \Delta T \right)$$

$$\{\sigma\}_{\text{supérieure}} = \begin{Bmatrix} -11.764 \\ -11.764 \\ -5.739 \end{Bmatrix} \text{ MPa} \quad \{\sigma\}_{\text{inférieure}} = \begin{Bmatrix} -3.921 \\ -3.921 \\ -14.348 \end{Bmatrix} \text{ MPa} \quad , \text{ etc.}$$

## 7.7 Résistance du stratifié

### Résistance du pli le plus faible

*Remarque : Les contraintes inter-plis ne sont pas considérées.*



**Figure 7.10** Courbe « contrainte-déformation » d'un stratifié soumis à une charge de traction indiquant des ruptures successives des plis conduisant à sa rupture finale [Gibson]

Pour la n<sup>e</sup> section de la courbe « contrainte-déformation », on a les relations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} N_{(x,y)}^{(n)} \\ \text{---} \\ M_{(x,y)}^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{(n)} & | & B^{(n)} \\ \text{---} & | & \text{---} \\ B^{(n)} & | & D^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{(x,y)}^0{}^{(n)} \\ \text{---} \\ \kappa_{(x,y)}^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (7.67)$$

Les éléments de réduction totale sont :

$$\begin{Bmatrix} N_{(x,y)} \\ \text{---} \\ M_{(x,y)} \end{Bmatrix}_{\text{tot}} = \sum_{n=1}^k \begin{Bmatrix} N_{(x,y)}^{(n)} \\ \text{---} \\ M_{(x,y)}^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (7.68)$$

et les déformations totales :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \text{---} \\ \kappa \end{Bmatrix}_{\text{tot}} = \sum_{n=1}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{(x,y)}^0{}^{(n)} \\ \text{---} \\ \kappa_{(x,y)}^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (7.69)$$

## 7.8 Théorie des plaques stratifiées du premier degré (First Order Shear Deformation Theory)

### Déformations

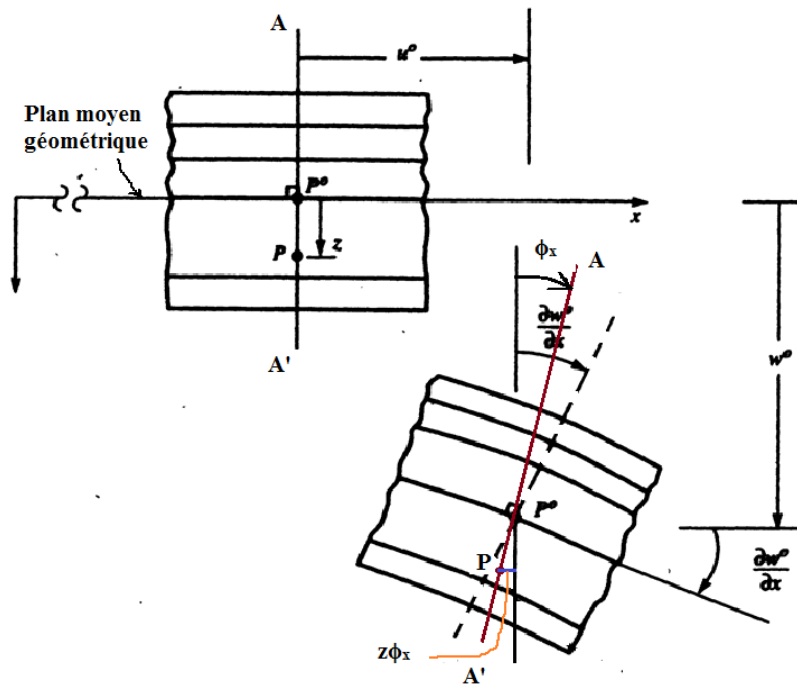
De façon générale, les champs de contraintes et de déformations dans une plaque mince constituée de stratifiés de composites peuvent se décrire avec une bonne précision en utilisant la théorie classique des stratifiés (TCS), à l'exception des régions près de leurs bords libres. Par contre, pour la description du comportement mécanique (flèche, répartition des contraintes, etc..) des stratifiés épais dont le rapport entre la largeur et l'épaisseur est inférieur à 10, cette théorie devient mal adaptée. La théorie des plaques du premier degré est une amélioration en tenant compte du cisaillement transverse.

### Hypothèses :

La déformée d'une normale AA' du stratifié reste un segment de droite lors de la déformation. **Toutefois, contrairement à la théorie classique des stratifiés, cette déformée ne reste pas normale à la déformée du plan moyen géométrique (PMG)** (figure 9.2).



La longueur de AA' reste inchangée; ce qui implique que  $\varepsilon_z=0$ .



**Figure 7.11** Déformation selon la théorie des plaques du premier degré en tenant compte du cisaillement transverse.

Sous l'action de la charge externe, le point  $\mathbf{p}^0$  qui est situé dans le PMG se déplace d'une distance  $u^0$  suivant la direction  $x$  (figure 7.11). Le point  $\mathbf{p}$  qui est situé d'une profondeur  $z$  en dessous du point  $\mathbf{p}^0$  se déplace d'une distance :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u^0(x, y) - z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v^0(x, y) - z\phi_y(x, y) \end{aligned} \quad (7.70)$$

En considérant l'hypothèse (2) et le fait que les angles  $\phi_{(x)}$  et  $\phi_{(y)}$  sont très petits, il est admis que :

$$w(x, y, z) = w^0(x, y) \quad (7.71)$$

En utilisant les relations entre déformations et déplacements, les composantes de la déformation en un point  $\mathbf{p}$  quelconque de l'épaisseur ont pour expression :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (u^0 - z \frac{\partial \phi_x}{\partial x}) = \frac{\partial u^0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} = \varepsilon_x^0 + z \kappa_x \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (v^0 - z \frac{\partial \phi_y}{\partial y}) = \frac{\partial v^0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} = \varepsilon_y^0 + z \kappa_y \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} - z (\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y}) = \gamma_{xy}^0 + z \kappa_{xy} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\phi_y + \frac{\partial w^0}{\partial y} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\phi_x + \frac{\partial w^0}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{7.72}$$

où :

$$\begin{aligned}
 \kappa_x &= -\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \\
 \kappa_y &= -\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
 \kappa_{xy} &= -(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y})
 \end{aligned} \tag{7.73}$$

Lorsque l'épaisseur de la plaque est très faible par rapport aux autres dimensions, les déformations  $\gamma_{yz}$  et  $\gamma_{xz}$  peuvent être négligées :

$$\begin{aligned}
 \gamma_{yz} &= -\phi_y + \frac{\partial w^0}{\partial y} = 0 \rightarrow \phi_y = \frac{\partial w^0}{\partial y} \\
 \gamma_{xz} &= -\phi_x + \frac{\partial w^0}{\partial x} = 0 \rightarrow \phi_x = \frac{\partial w^0}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{7.74}$$

En substituant (7.74) dans (7.73), les expressions des courbures deviennent identique aux celles dans le cas de la théorie classique des stratifiés :

$$\begin{aligned}
 \kappa_x &= \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \\
 \kappa_y &= \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \\
 \kappa_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{7.75}$$

### Contraintes dans le $k^e$ pli

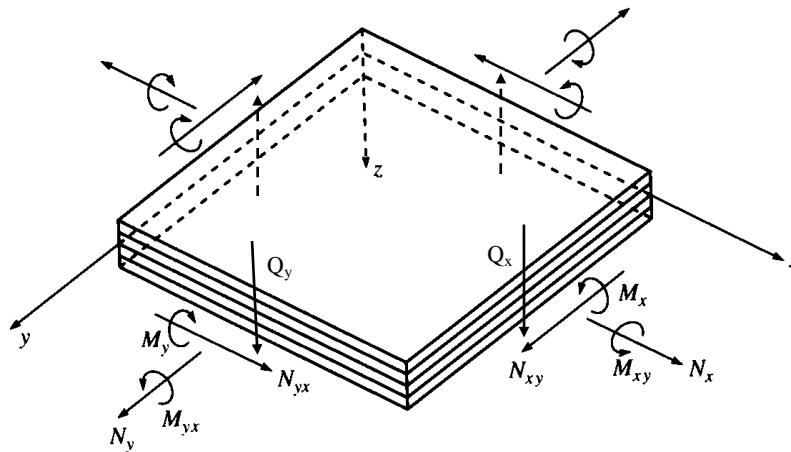
Contraintes en membrane :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad (7.76)$$

Contraintes du cisaillement transverse :

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_k \quad (7.77)$$

### Matrices de rigidité et de souplesse du stratifié



**Figure 7.12 Les contraintes et moment résultantes**

Les contraintes résultantes en membrane et moments résultants sont définis dans la section 7.2 comme suivantes:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x dz = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_x)_k dz \right\} \\
 N_y &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y dz = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_y)_k dz \right\} \\
 N_{xy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} dz = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\tau_{xy})_k dz \right\} \\
 M_x &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x z dz = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_x)_k \times z dz \right\} \\
 M_y &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y z dz = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_y)_k \times z dz \right\} \\
 M_{xy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} z dz = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\tau_{xy})_k \times z dz \right\}
 \end{aligned} \tag{7.78}$$

d'où :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{7.79}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\
 B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\
 D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)
 \end{aligned} \tag{7.80}$$

Par analogie, les contraintes résultantes du cisaillement transverse présentées à la figure 7.12 sont définies comme :

$$\begin{aligned} Q_{yz} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz = \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz \right\} \\ Q_{xz} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz = \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz \right\} \end{aligned} \quad (7.81)$$

d'où :

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (7.82)$$

avec :

$$F_{ij} = \sum (\bar{C}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad i, j = 4, 5 \quad (7.83)$$

Remarque : En général, les matrices [A], [B] et [D] sont utilisées dans l'application de la théorie classique des stratifiés. La matrice [F] qui s'appelle matrice de rigidité en cisaillement transverse, est utilisée seulement lors de l'application de la théorie des plaques de premier degré.

## 7.9 Théorie modifiée des plaques stratifiées avec cisaillement transverse

Il s'agit d'un remplacement des coefficients de la matrice de rigidité des contraintes du cisaillement transverse [F] par de nouveaux coefficients. La nouvelle matrice résultante est la matrice [H] :

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (7.84)$$

avec

$$H_{ij} = k_{ij} F_{ij} \quad (7.85)$$

Les paramètres  $k_{ij}$  sont les facteurs de correction en cisaillement à déterminer. En supposant que la répartition de la contrainte de cisaillement est une parabole en fonction de l'épaisseur du stratifié, la fonction suivante peut être utilisée pour la pondération :

$$f(z) = (5/4)[1 - (2z/t)^2] \quad (7.86)$$

Par conséquent, la matrice H s'écrit :

$$H_{ij} = \frac{5}{4} \sum_{k=1}^N (\bar{C}_{ij})_k [(h_k - h_{k-1}) - \frac{4}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \frac{1}{t^2}] \quad (7.87)$$

où  $t$  = épaisseur du stratifié et  $i, j = 4, 5$ .

**Exemple 7.8** Soit un stratifié [55/-55] formé de deux plis de matériau composite unidirectionnel dont  $C_{44}=G_{23}=0.385\text{GPa}$  et  $C_{55}=G_{13}=3.789\text{GPa}$ . Sachant que les plis ont la même épaisseur de 0.635mm, calculez la matrice de rigidité réduite pour les contraintes du cisaillement transverse.

Solution

Pli #1 ( $\theta=55^\circ$ )

$$(\bar{C}_{44})_{55} = C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta = 0.385 \cos^2(55) + 3.789 \sin^2(55) = 2.669\text{GPa}$$

$$(\bar{C}_{55})_{55} = 0.385 \sin^2(55) + 3.789 \cos^2(55) = 1.505\text{GPa}$$

$$(\bar{C}_{45})_{55} = (3.789 - 0.385) \sin(55) \cos(55) = 1.599\text{GPa}$$

Pli #2 ( $\theta=-55^\circ$ )

$$(\bar{C}_{44})_{-55} = C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta = 0.385 \cos^2(-55) + 3.789 \sin^2(-55) = 2.669\text{GPa}$$

$$(\bar{C}_{55})_{-55} = 0.385 \sin^2(-55) + 3.789 \cos^2(-55) = 1.505\text{GPa}$$

$$(\bar{C}_{45})_{-55} = (3.789 - 0.385) \sin(-55) \cos(-55) = -1.599\text{GPa}$$

En appliquant l'équation (7.87), on obtient :

$$H_{44} = 2.82\text{GPa-mm}$$

$$H_{55} = 1.59\text{GPa-mm}$$

$$H_{45} = 0$$

## Exercices

1. Un stratifié dont l'épaisseur est égale à 0,25 mm, est soumis à un chargement dans son plan. Sachant que les déformations du plan moyen géométrique sont les suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2751 \\ -1331 \\ -1125 \end{Bmatrix} \times 10^{-6} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,077 \\ 0,009 \\ 0,070 \end{Bmatrix} \text{mm}^{-1}$$

Déterminez les déformations à la surface supérieure du stratifié.

Réponse :  $\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6874 \\ -2456 \\ -7625 \end{Bmatrix} \times 10^{-6}$

2. La figure suivante illustre un stratifié [0/30/-45] de carbone/époxy AS3501 ( $v_f = 65\%$ ). Sachant que les plis ont une même épaisseur de 5mm, calculez la matrice de rigidité du stratifié.

Réponse :  $[A] = \begin{bmatrix} 1,34 & 0,29 & 0,04 \\ 0,29 & 0,37 & -0,08 \\ 0,04 & -0,08 & 0,35 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{MPa-mm}$

$$[B] = \begin{bmatrix} -2,34 & 0,72 & -0,81 \\ 0,72 & 0,90 & -0,81 \\ -0,81 & -0,81 & 0,72 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{MPa-mm}^2, \quad [D] = \begin{bmatrix} 2,58 & 4,87 & -3,97 \\ 4,87 & 7,56 & -4,23 \\ -3,97 & -4,23 & 6,05 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{MPa-mm}^3$$

3. Soit un stratifié  $[\pm 30/0]_S$  de carbone/époxy dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$E_1 = 150 \text{ GPa}, E_2 = 12,1 \text{ GPa}, G_{12} = 4,4 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0,248.$$

Sachant que les déformations du plan moyen géométrique sont :

$$\varepsilon_x^0 = 1000 \times 10^{-6} \text{ et } \varepsilon_y^0 = \gamma_{xy}^0 = \kappa_x^0 = \kappa_y^0 = \kappa_{xy}^0 = 0, \text{ déterminez :}$$

les chargements causant ces déformations;

la répartition des contraintes à travers l'épaisseur du stratifié.

Réponses :  $N_x = 99,2164 \text{ N/mm}, N_y = 18,828 \text{ N/mm}, N_{xy} = M_x = M_y = M_{xy} = 0;$

$\text{Pli\#1, sup. : } \sigma_x = 89,9866(\text{MPa}), \sigma_y = 29,1301(\text{MPa}), \tau_{xy} = 29,1301(\text{MPa})$

Soit un stratifié  $[0/90]_S$  d'un composite carbone/époxy dont les caractéristiques fondamentales sont les suivantes :

$$E_1 = 181 \text{ GPa}, E_2 = 10,3 \text{ GPa}, G_{12} = 7,17 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0,28$$

Sachant que l'épaisseur de chacun des plis est de 5 mm, calculez :

$E_x$ ,  $E_y$ ,  $G_{xy}$ ,  $\nu_{xy}$ ,  $E_{fx}$  et  $E_{fy}$  du stratifié.

Réponses :  $E_x=124,53 \text{ GPa}$ ,  $E_y=67,43 \text{ GPa}$ ,  $G_{xy}=7,17 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{xy}=0,043$ ,  $E_{fx}= 174,96 \text{ GPa}$ ,  $E_{fy}=16,65 \text{ GPa}$